1°) Placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 sur l'axe des abscisses ayant pour abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

2°) Que peut-on prévoir pour la convergente de la suite (u_n).

3°) Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, $f'(x) \leq \frac{2}{3}$.

4°) a) Démontrer par récurrence que pour tout naturel n, $1 \leq u_n \leq \alpha$.

b) Démontrer que pour tout naturel n, $\int_{u_n}^{\alpha} f'(x)dx \leq \frac{2}{3}(\alpha - u_n)$.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $\alpha - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(\alpha - u_n)$.

d) Montrer alors que pour tout entier naturel n, $0 \leq \alpha - u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

e) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE N°4 : 40' 6 points

1°) Soit g la fonction définie sur $[1,+\infty[$ $g(x) = x\ln x - 1$.

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[1,+\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in]1{,}7;1{,}8[$.

c) En déduire le signe de $g(x)$.

d) Montrer que $\ln(\ln\alpha) = -\ln\alpha$.

2°) Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(\ln x)$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} = 0$ en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une branche asymptotique de direction $\Delta : y = x$.

c) Etudier la position de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

d) Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que pour tout $x \in]1,+\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x\ln(x)}$.

e) Dresser le tableau de variation de f.

3°) Dans le graphique ci-dessous, on a tracer la courbe $\Gamma : x \mapsto \ln x$ et la droite $\Delta' : y = -x$.

a) Montrer que le point d'intersection de Γ et Δ' a pour coordonnées $(\ln\alpha, -\ln\alpha)$.

b) Construire sur le même graphique, les points $A(\alpha,0)$ et $B(\alpha, f(\alpha))$

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn